*Lezione 4*

# Risposte canoniche dei sistemi del primo e del secondo ordine

# Parametri caratteristici della risposta allo scalino

Per risposte canoniche si intendono le risposte dei sistemi dinamici ai segnali cosiddetti canonici (impulso, scalino, rampa), ovvero quei segnali utilizzabili come test per evidenziare le proprietà dinamiche del sistema. Ci concentreremo sui sistemi del primo e secondo ordine in quanto rappresentativi dei modelli di prima approssimazione di larga parte dei sistemi fisici.

Sul tracciato di una generica risposta allo scalino potremo definire alcuni parametri caratteristici:

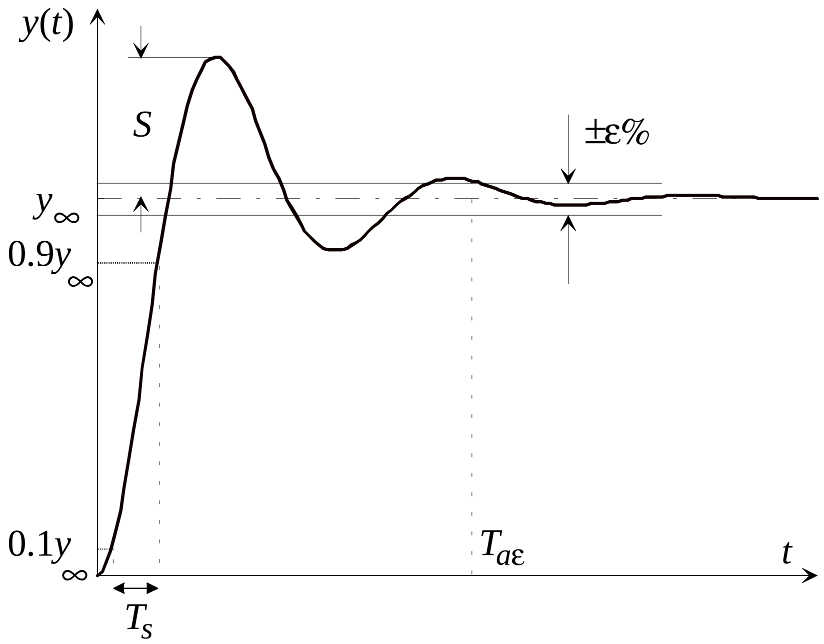



*Fig. 1 : Parametri caratteristici della risposta allo scalino*

- **Tempo di salita $T_s$:** è il tempo impiegato dalla risposta a passare dal 10% al 90% del valore di regime.
- **Tempo di assestamento al (100-ε)% $T_{a\varepsilon}$:** è il tempo impiegato dalla risposta ad entrare definitivamente in una fascia compresa tra ±ε% del valore di regime.
- **Sovraelongazione percentuale massima $S_E$:** è l'escursione massima della risposta rispetto al valore di regime, rapportata in percentuale al valore di regime stesso:

$$S_E = \frac{S}{y_\infty}100 = \frac{\max\{y(t)\} - y_\infty}{y_\infty}100 \,.$$

# Sistemi del primo ordine

L'espressione più generale della funzione di trasferimento per un sistema del primo ordine (ossia con un solo polo) è la seguente:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g}\frac{1+s\tau}{1+sT}.$$

### *Sistemi strettamente propri*

Sono i sistemi in cui il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore. Sistemi del primo ordine strettamente propri non possono quindi presentare zeri:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g}\frac{1}{1+sT} = \begin{cases} \dfrac{\mu}{1+sT}, & g=0 \\ \dfrac{\mu}{s}, & g=1 \end{cases}$$

$\boxed{g=0}$

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

Studiamo la *risposta allo scalino* ($u(t) = \mathrm{sca}(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = 1/s$):

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{1+sT}\frac{1}{s} = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu T}{1+sT} = \mu\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}\right).$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \mu\left(1-e^{-t/T}\right), \quad t \geq 0 \ .$$

A seconda del segno di $T$ l'andamento di $y$ risulta molto diverso[1]:

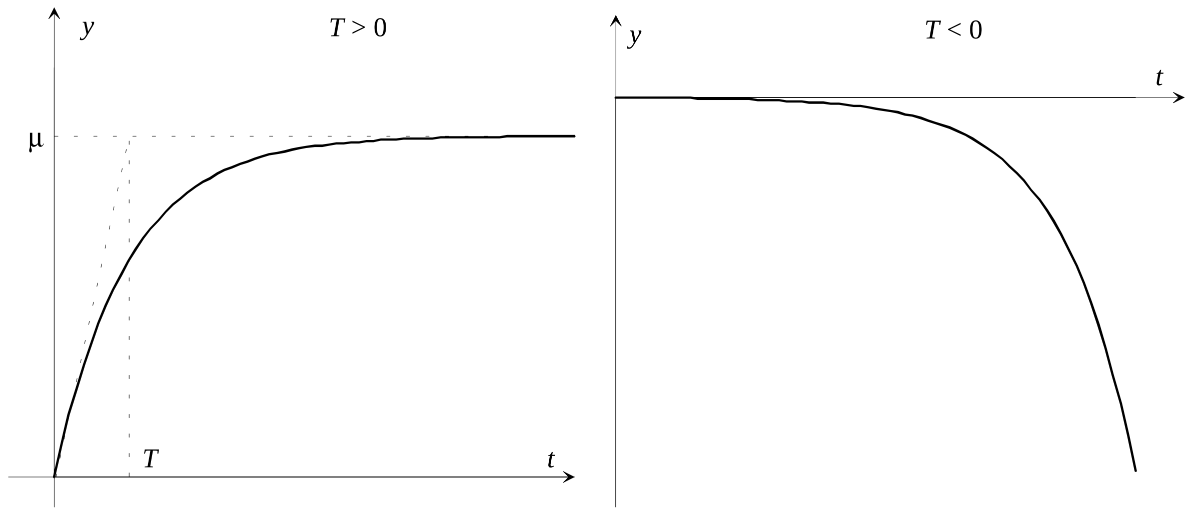



*Fig. 2 : Risposta allo scalino per T>0 e T<0*

[1] Qui e nel seguito si assumerà, senza alcuna perdita di generalità, il parametro μ positivo.

Quando $T>0$, la risposta $y$ si assesta su un valore finito, mentre quando $T<0$ la risposta diverge all'infinito. Si osservi che il sistema di funzione di trasferimento $G(s)$ presenta un polo per $s=-1/T$. Pertanto il sistema risulta *asintoticamente stabile* per $T>0$, *instabile* per $T<0$.

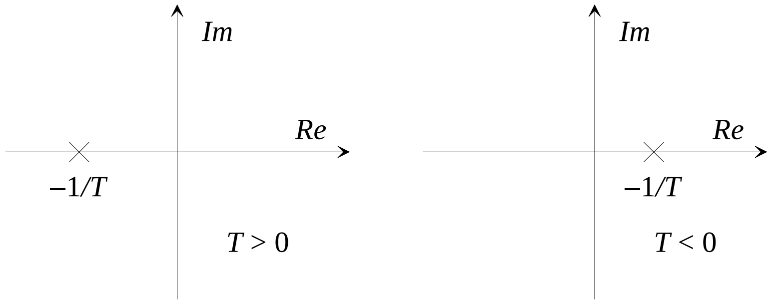



*Fig. 3 : Posizione del polo per T>0 e T<0*

Considerando solo il caso asintoticamente stabile ($T>0$), si può calcolare il valore limite (per $t\rightarrow\infty$) della risposta allo scalino con il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}[sY(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{\mu}{1+sT}\frac{1}{s}\right] = \mu .$$

Pertanto la risposta allo scalino tende al *guadagno* $\mu$ del sistema: in altre parole il rapporto tra il valore limite dell'uscita ed il valore limite dell'ingresso (che in questo caso vale 1, essendo l'ingresso uno scalino), è pari al guadagno del sistema. Ciò costituisce una circostanza generale.

La forma del transitorio dipende invece solo dalla *costante di tempo T*. All'istante iniziale ($t=0$) la derivata di $y$ vale $\mu/T$: pertanto inizialmente la curva è tangente alla retta che passa per l'origine e che intercetta la retta orizzontale di ordinata $\mu$ (ossia la retta a cui tende la risposta), in corrispondenza dell'istante $t=T$ (fig. 1). Ne consegue che il transitorio è tanto più veloce quanto più piccolo è il valore della costante di tempo $T$. Si può verificare che la risposta $y$ raggiunge praticamente (al 98÷99%) il valore di regime dopo un tempo pari a 4÷5 volte la costante di tempo $T$. Si osservi che da queste considerazioni emerge anche con molta evidenza un metodo grafico per tracciare l'andamento approssimato della risposta allo scalino.

Studiamo anche la *risposta all'impulso* ($u(t) = \text{imp}(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = 1$ ):

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{1+sT} = \frac{\mu}{T}\frac{1}{s+1/T}.$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \frac{\mu}{T}e^{-t/T}, \quad t \geq 0 .$$

Si noti che la risposta all'impulso risulta uguale alla derivata rispetto al tempo della risposta allo scalino (circostanza generale).

A seconda del segno di $T$ si ottiene:

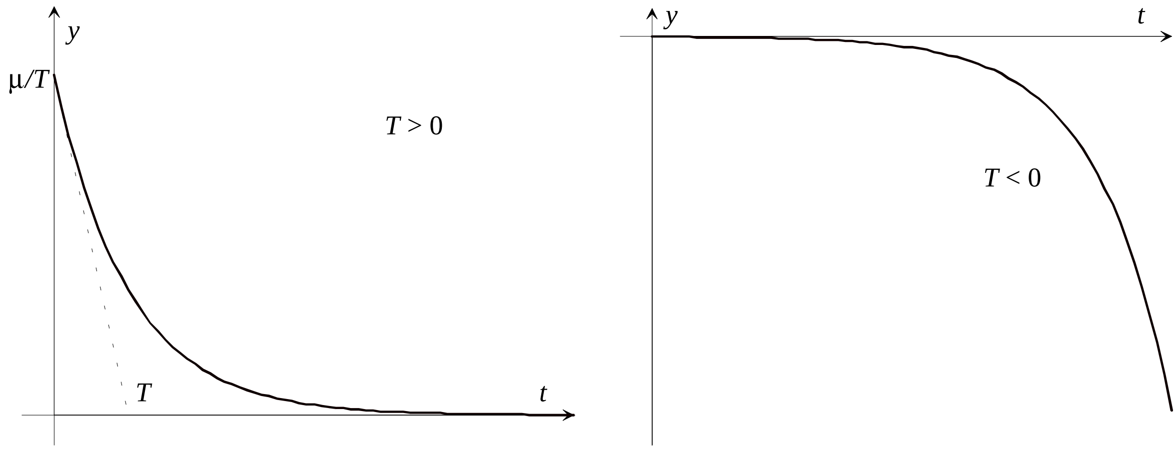



*Fig. 4 : Risposta all'impulso per T>0 e T<0*

Coerentemente con la definizione di stabilità, per $T$>0 (sistema asintoticamente stabile), la risposta converge a zero, per $T$<0 (sistema instabile) la risposta diverge.

$\boxed{g=1}$

$G(s)=\frac{\mu}{s}$ .

Il sistema ha un polo in $s$=0: è pertanto semplicemente stabile.

Studiamo la *risposta allo scalino* ($u(t)=\mathrm{sca}(t) \quad \Rightarrow \quad U(s)=1/s$):

$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{\mu}{s}\frac{1}{s}=\frac{\mu}{s^2}$.

Antitrasformando:

$y(t)=\mu\,\mathrm{ram}(t)$ .

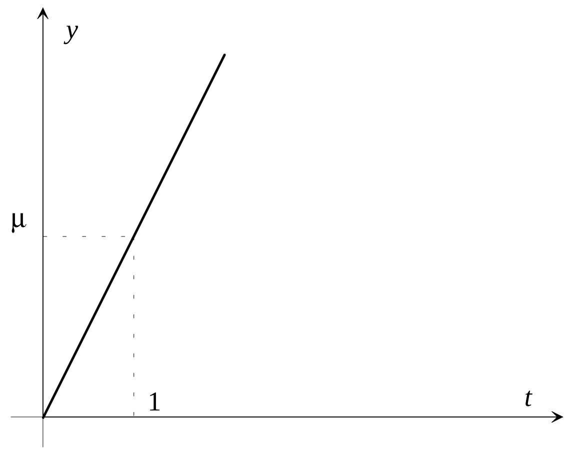



*Fig. 5 : Risposta allo scalino*

Per quanto riguarda la risposta all'impulso:

$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{\mu}{s}$.

e quindi:

$y(t) = \mu \, \mathrm{sca}(t)$ .

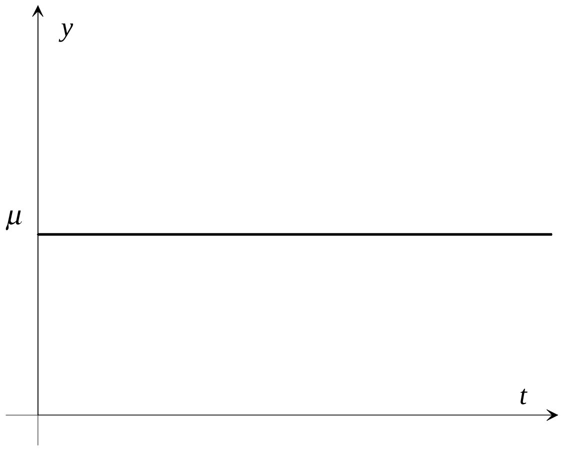



*Fig. 6 : Risposta all'impulso*

In entrambi i casi l'uscita equivale all'integrale dell'ingresso, moltiplicato per il fattore $\mu$.

***Sistemi propri non strettamente***

Sono i sistemi in cui il grado del denominatore è uguale al grado del numeratore. Sistemi del primo ordine propri non strettamente presentano quindi uno zero:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{1+s\tau}{1+sT} = \left\langle \begin{array}{ll} \mu \dfrac{1+s\tau}{1+sT}, & g = 0 \\ \mu \dfrac{1+s\tau}{s}, & g = 1 \\ \mu \dfrac{s}{1+sT}, & g = -1 \end{array} \right.$$

$\boxed{g = 0}$

$$G(s) = \mu \frac{1+s\tau}{1+sT}$$

Studiando la *risposta allo scalino* si perviene alla seguente espressione:

$$y(t) = \mu \left[ 1 + \left( \frac{\tau}{T} - 1 \right) e^{-t/T} \right], \quad t \geq 0 \ .$$

Al variare del valore relativo di $\tau$ e $T$ (e quindi della posizione relativa del polo e dello zero) la risposta allo scalino cambia sensibilmente (si considera solo il caso asintoticamente stabile, $T$>0):

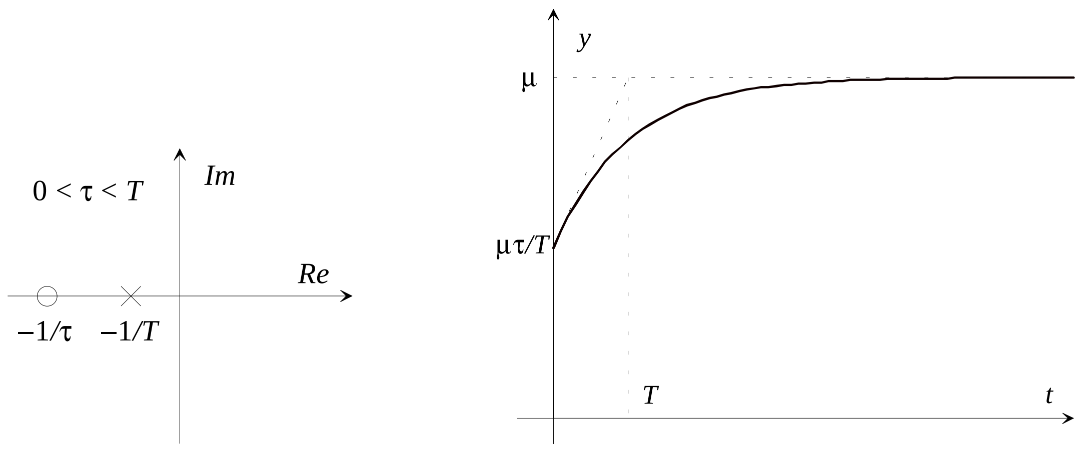



*Fig. 7 : Risposta allo scalino per 0<τ<T*

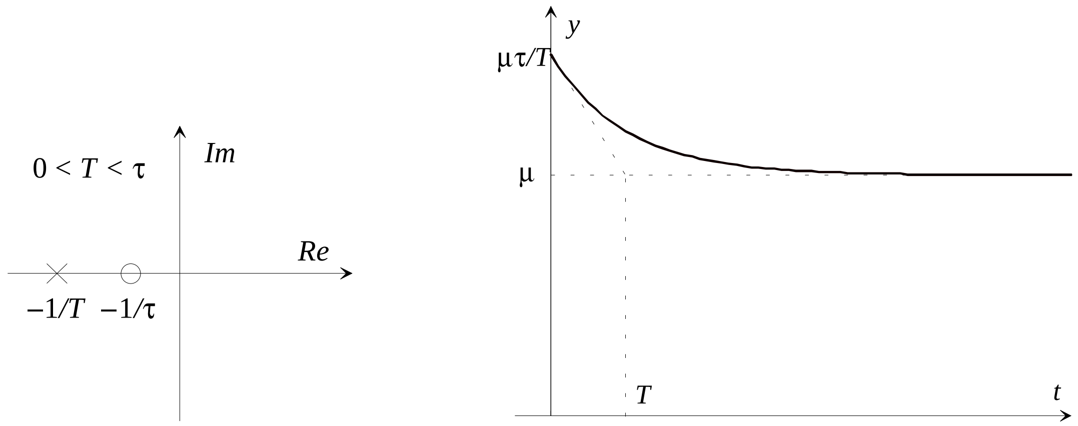



*Fig. 8 : Risposta allo scalino per 0<T<τ*

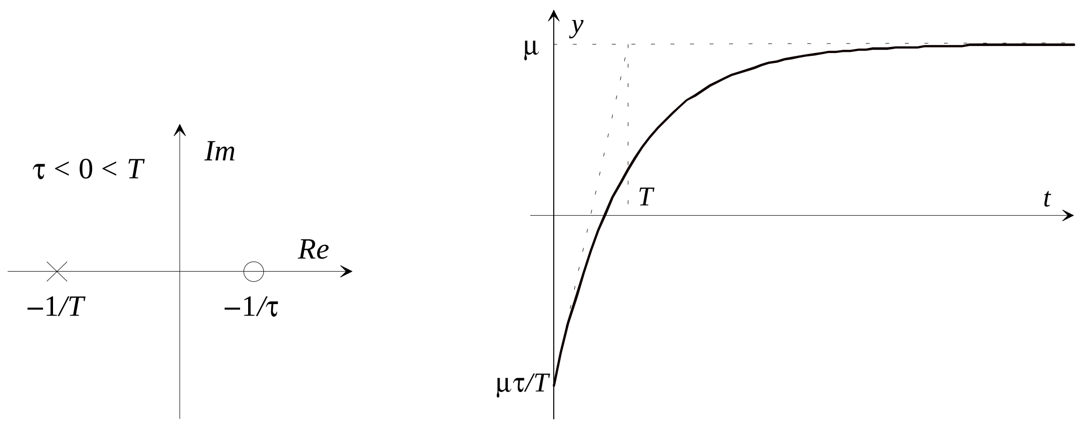



*Fig. 9 : Risposta allo scalino per τ<0<T*

Uno zero nel semipiano sinistro “anticipa” la risposta rispetto al caso di sistema privo di zero, nel senso che la risposta stessa si porta inizialmente ad un valore diverso da zero, dello stesso segno del valore di regime.

Uno zero nel semipiano destro “ritarda” la risposta rispetto al caso di sistema privo di zero, nel senso che la risposta stessa si porta inizialmente ad un valore diverso da zero, di segno opposto al valore di regime (*risposta inversa*). Questo tipo di comportamento è tipico dei sistemi con zeri nel semipiano destro, che per ragioni che saranno chiare più avanti nel corso, prendono anche il nome di sistemi *a fase non minima*.

$\boxed{g=1}$

$$G(s)=\mu\frac{1+s\tau}{s}$$

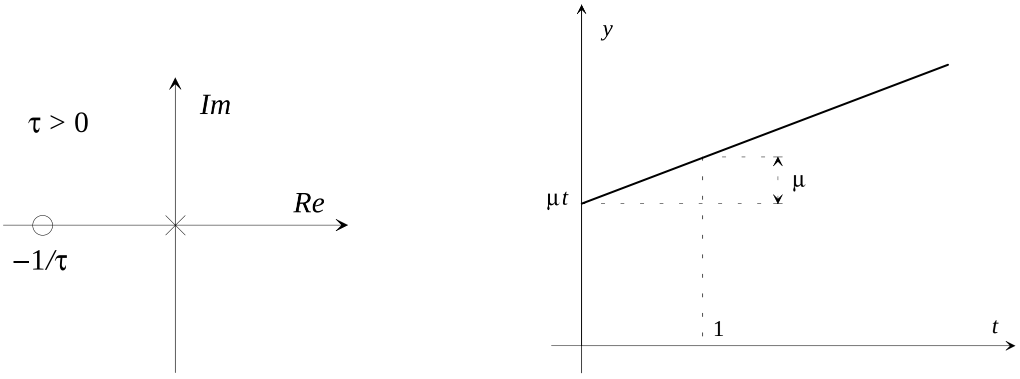



*Fig. 10 : Risposta allo scalino per τ>0*

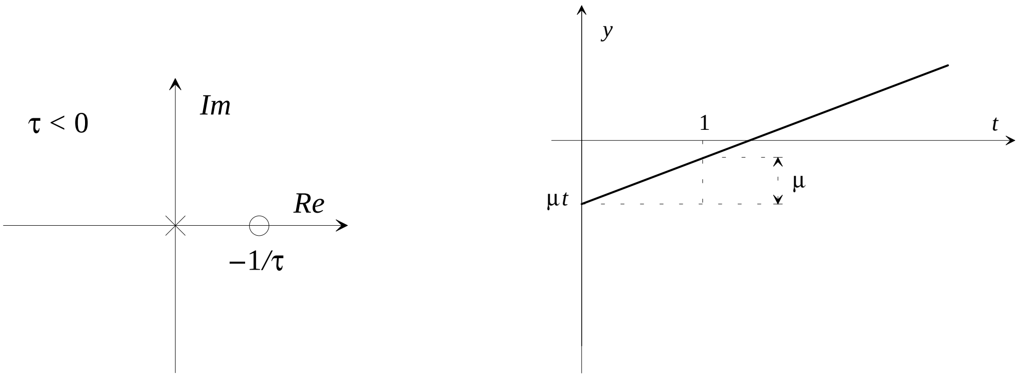



*Fig. 11 : Risposta allo scalino per τ<0*

$\boxed{g=-1}$

$$G(s)=\mu\frac{s}{1+sT}$$

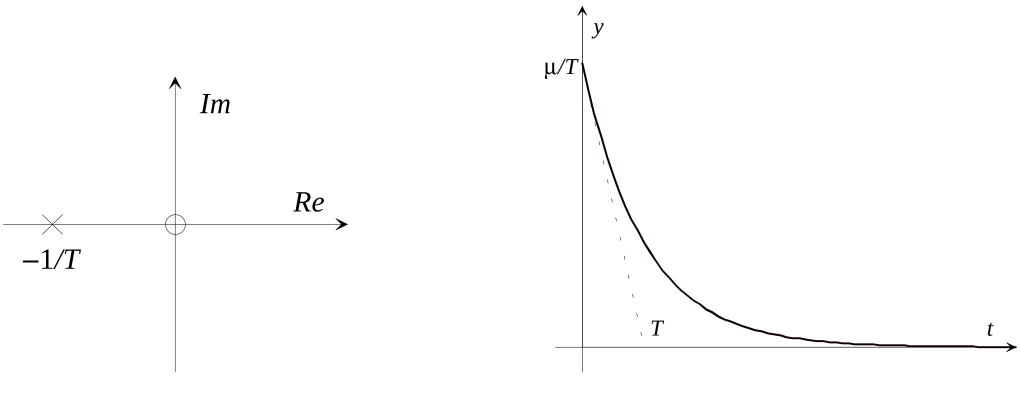



*Fig. 12 : Risposta allo scalino (zero in s=0)*

# Sistemi del secondo ordine

Per i sistemi del secondo ordine (che presentano cioè due poli) ci limiteremo ad esaminare alcuni casi particolari, rinunciando alla casistica completa.

***Sistemi con poli reali e nessuno zero***

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \, .$$

Assumiamo $T_1$ e $T_2$ positivi, ossia il sistema asintoticamente stabile (i suoi poli, in $s = -1/T_1$, $s = -1/T_2$, sono nel semipiano sinistro).

La trasformata di Laplace della risposta allo scalino è data da:

$$Y(s) = \frac{\mu}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} \, .$$

In base al teorema del valore iniziale, otteniamo:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty}[sY(s)] = \lim_{s\to\infty} \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty}[s\mathscr{L}(\dot{y})] = \lim_{s\to\infty}[s(sY(s)-y(0))] = \lim_{s\to\infty}[s^2Y(s)] = \lim_{s\to\infty} \frac{\mu s}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty}[s\mathscr{L}(\ddot{y})] = \lim_{s\to\infty}[s(s^2Y(s)-\dot{y}(0))] = \lim_{s\to\infty}[s^3Y(s)] = \lim_{s\to\infty} \frac{\mu s^2}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{\mu}{T_1T_2} > 0$$

mentre in base al teorema del valore finale:

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0}[sY(s)] = \lim_{s\to 0} \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \mu \, .$$

La risposta parte quindi da zero, con tangente orizzontale e concavità rivolta verso l'alto. Tende poi al valore $\mu$.

L'antitrasformata si può ottenere con il metodo di Heaviside:

$$y(t) = \mu\left[1 - \frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-t/T_2}\right], \quad t \geq 0 \, .$$

L'andamento tipico è a forma di "S":

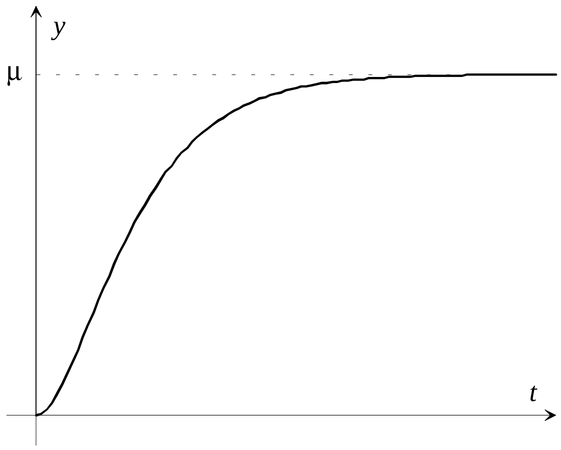



*Fig. 13 : Risposta allo scalino*

La durata del transitorio può essere facilmente legata alle due costanti di tempo $T_1$ e $T_2$ solo se i due valori sono molto diversi tra loro: in tal caso, infatti, conta solo il valore della costante di tempo più grande.

Se, ad esempio $T_1 >> T_2$, allora:

$$y(t) \approx \mu\left[1-e^{-t/T_1}\right], \quad t \geq 0.$$

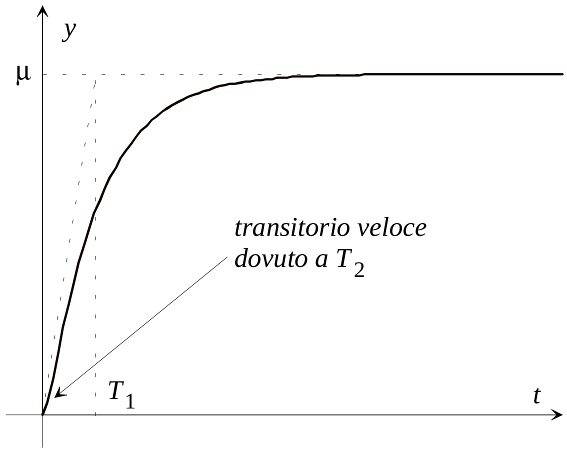



*Fig. 14 : Risposta allo scalino con $T_1 >> T_2$*

***Sistemi con poli reali e uno zero***

$$G(s) = \mu\frac{1+s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}.$$

Assumiamo $T_1$ e $T_2$ positivi, ossia il sistema asintoticamente stabile.

La trasformata di Laplace della risposta allo scalino è data da:

$$Y(s) = \mu\frac{1+s\tau}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}.$$

In base al teorema del valore iniziale, otteniamo:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}[sY(s)]=\lim_{s\to\infty}\left[\mu\frac{1+s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}\right]=0$$

$$\dot{y}(0)=\lim_{s\to\infty}[s\mathcal{L}(\dot{y})]=\lim_{s\to\infty}[s(sY(s)-y(0))]=\lim_{s\to\infty}[s^2Y(s)]=\lim_{s\to\infty}\left[\mu s\frac{1+s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}\right]=\frac{\mu\tau}{T_1T_2}$$

mentre in base al teorema del valore finale:

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}[sY(s)]=\lim_{s\to 0}\left[\mu\frac{1+s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}\right]=\mu\ .$$

La risposta parte quindi da zero, con tangente rivolta verso l'alto per $\tau>0$, verso il basso per $\tau<0$. La risposta tende poi al valore $\mu$.

Qualitativamente, gli andamenti della risposta allo scalino saranno:

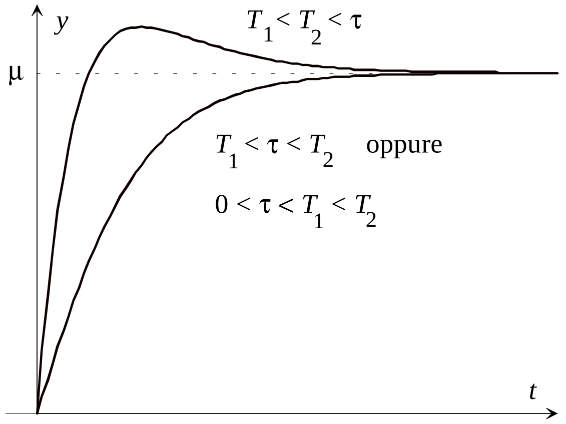



*Fig. 15 : Risposta allo scalino con τ>0*

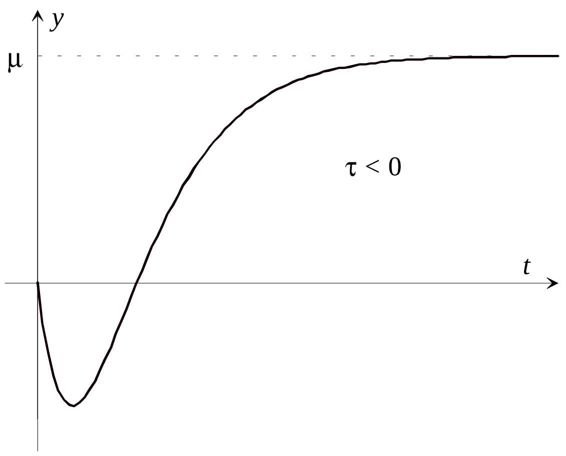



*Fig. 16 : Risposta allo scalino con τ<0*

Si osservi il tratto di risposta inversa nel caso di zero nel semipiano destro ($\tau < 0$).

***Sistemi con poli complessi e coniugati e nessuno zero***

In questo caso è comodo riscrivere l'espressione della funzione di trasferimento nella forma equivalente:

$$G(s)=\mu\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\ ,$$

dove $\zeta$, **smorzamento**, e $\omega_n$, **pulsazione naturale**, sono stati definiti nella precedente lezione.

Si ricorda che il significato dei parametri $\zeta$ e $\omega_n$ è illustrato dalla seguente figura:

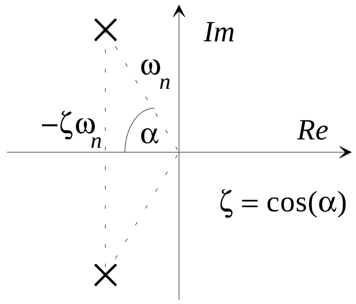



*Fig. 17 : Significato dei parametri $\zeta$ e $\omega_n$*

Si osservi inoltre che:

$\zeta$>0: due poli nel semipiano sinistro $\Rightarrow$ sistema *asintoticamente stabile*

$\zeta$=0: due poli sull'asse immaginario $\Rightarrow$ sistema *semplicemente stabile*

$\zeta$<0: due poli nel semipiano destro $\Rightarrow$ sistema *instabile*

Studiamo la *risposta allo scalino*:

$$Y(s)=\frac{\mu}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\ .$$

In base al teorema del valore iniziale, otteniamo:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}[sY(s)]=\lim_{s\to\infty}\frac{\mu\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=0$$

$$\dot{y}(0)=\lim_{s\to\infty}\left[s\mathcal{L}(\dot{y})\right]=\lim_{s\to\infty}\left[s\left(sY(s)-y(0)\right)\right]=\lim_{s\to\infty}\left[s^2Y(s)\right]=\lim_{s\to\infty}\frac{\mu\omega_n^2 s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=0$$

$$\ddot{y}(0)=\lim_{s\to\infty}\left[s\mathcal{L}(\ddot{y})\right]=\lim_{s\to\infty}\left[s\left(s^2Y(s)-\dot{y}(0)\right)\right]=\lim_{s\to\infty}\left[s^3Y(s)\right]=\lim_{s\to\infty}\frac{\mu\omega_n^2 s^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\mu\omega_n^2>0$$

mentre, per $\zeta$>0, in base al teorema del valore finale:

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0}[sY(s)]=\lim_{s\to 0}\frac{\mu\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\mu\ .$$

L'espressione analitica della risposta allo scalino, ottenibile per antitrasformazione, è la seguente:

$$y(t)=\mu\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\alpha\right)\right],$$

dove $\zeta = \cos(\alpha)$.

Per $\zeta$=0, si ha:

$$y(t)=\mu\left[1-\cos\left(\omega_n t\right)\right]$$

ossia una cosinusoide di pulsazione $\omega_n$:

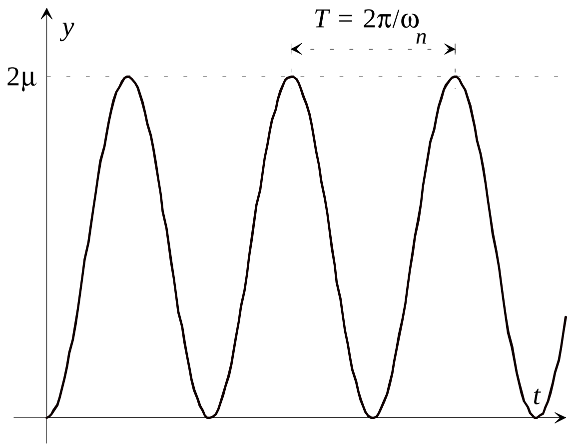



*Fig. 18 : Risposta allo scalino per ζ=0*

Per $\zeta \neq 0$, la risposta ha l'andamento di una sinusoide inviluppata da due esponenziali (convergenti nel caso asintoticamente stabile, $\zeta>0$, divergenti nel caso instabile, $\zeta<0$).

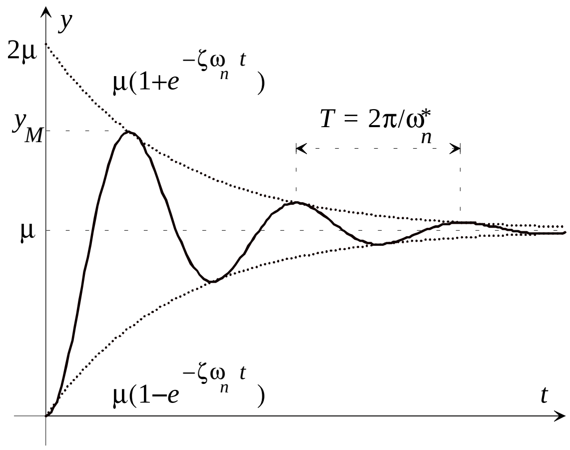



*Fig. 19 : Risposta allo scalino per ζ>0 ($\omega_n^* = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ )*

Si può dimostrare che, nel caso asintoticamente stabile, la *sovraelongazione percentuale massima*, ossia il rapporto percentuale tra l'escursione del primo picco della risposta rispetto al valore di regime ed il valore di regime stesso, dipende esclusivamente dal fattore di smorzamento $\zeta$:

$$S_E = 100\frac{y_M - \mu}{\mu} = 100 e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

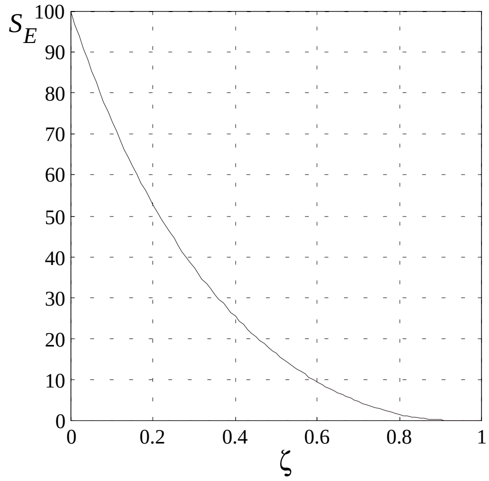



*Fig. 19 : Sovraelongazione percentuale massima rispetto al fattore di smorzamento*

Per fare in modo che la sovraelongazione percentuale massima sia inferiore ad un valore assegnato, occorrerà quindi che i poli del sistema appartengano ad un determinato settore del semipiano sinistro del piano complesso (come quello tratteggiato in figura):

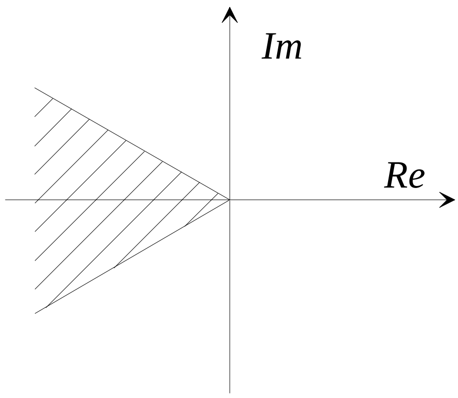



*Fig. 20 : Settore del piano complesso per limitare la sovraelongazione*

Il **tempo di assestamento** può invece essere determinato con buona approssimazione (per eccesso) facendo riferimento anziché alla risposta ad uno dei suoi inviluppi. Volendo quindi calcolare ad esempio il tempo di assestamento al 99% ($T_{a1}$) , si imporrà:

$$\mu\left(1 - e^{-\zeta\omega_n T_{a1}}\right) = 0.99\mu \quad \Rightarrow \quad e^{-\zeta\omega_n T_{a1}} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n T_{a1} = \ln 100$$

e quindi:

$$T_{a1} = \frac{\ln 100}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n}.$$

Il tempo di assestamento risulta quindi inversamente proporzionale al modulo della **parte reale dei poli**. Per limitare il tempo di assestamento occorrerà quindi che i poli del sistema siano caratterizzati da un prodotto $\zeta\omega_n$ sufficientemente grande, ossia che appartengano ad un semipiano incluso nel semipiano sinistro del piano complesso sufficientemente lontano dall'asse immaginario (come quello tratteggiato in figura):

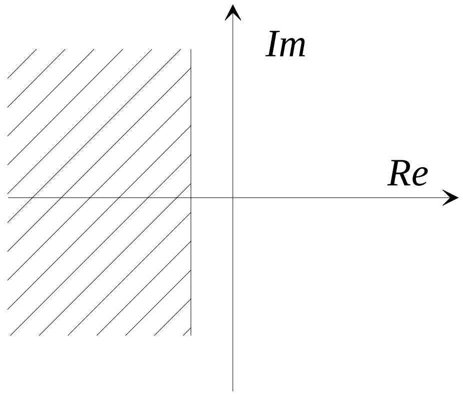



*Fig. 21 : Semipiano del piano complesso per limitare il tempo di assestamento*

Volendo contenere sia la sovraelongazione sia il tempo di assestamento, i poli della funzione di trasferimento dovranno trovarsi in una regione del piano complesso intersezione delle due regioni tratteggiate nelle precedenti figure.

# Esercizi

***Esercizio 4.1***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4}{s+2}$$

***Esercizio 4.2***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1-0.5s}{1+s}$$

***Esercizio 4.3***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)}$$

***Esercizio 4.4***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{18}{s^2+9}$$

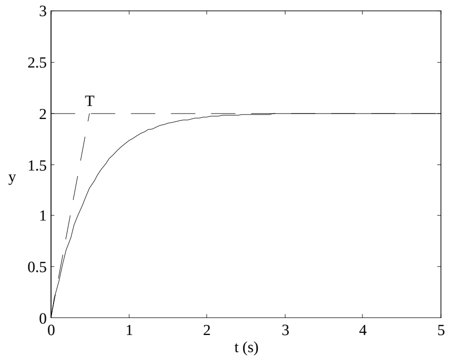
# Traccia delle soluzioni

***Esercizio 4.1***

$G(s)$ è della forma:

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT}$$

con $\mu = 2$, $T = 0.5$. Pertanto:

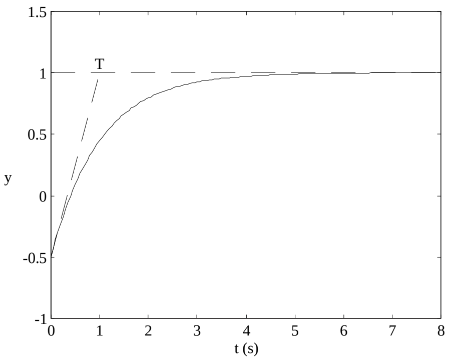



***Esercizio 4.2***

$G(s)$ è della forma:

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{1 + sT}$$

con $\mu = 1$, $T = 1$, $\tau = -0.5$. Pertanto:

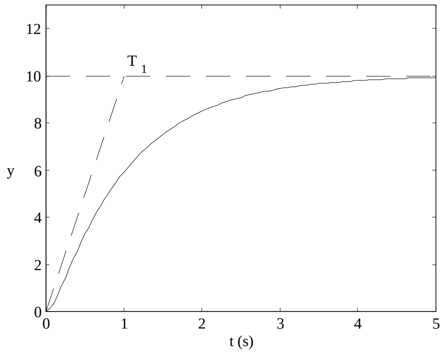


### *Esercizio 4.3*

$G(s)$ è della forma:

$$G(s)=\frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

con $\mu = 10$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0.1$. Pertanto la risposta allo scalino è dominata dalla costante di tempo $T_1$:

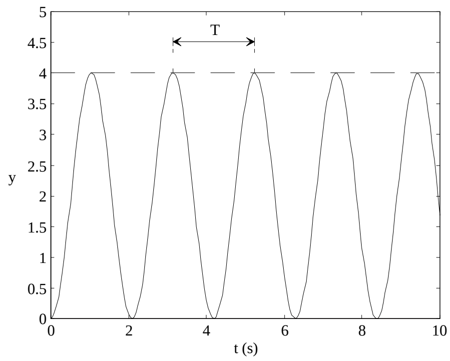



### *Esercizio 4.4*

$G(s)$ è della forma:

$$G(s)=\mu\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

con $\mu = 2$, $\omega_n = 3$, $\zeta = 0$. Pertanto:




Il periodo $T$ dell'oscillazione permanente vale:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_n}=2.094\ s$$